www.r0x.it

Forum degli Studenti di Ingegneria dell'Università di Salerno

Gestito da

Associazione StudentIngegneria
Sede: Aula T25/1 – 089/96-4166
studentingegneriasalerno@gmail.com
www.r0x.it – www.studentingegneria.it

ESAME DI MATEMATICA III – Prof. Scarpetta

Ingegneria Meccanica

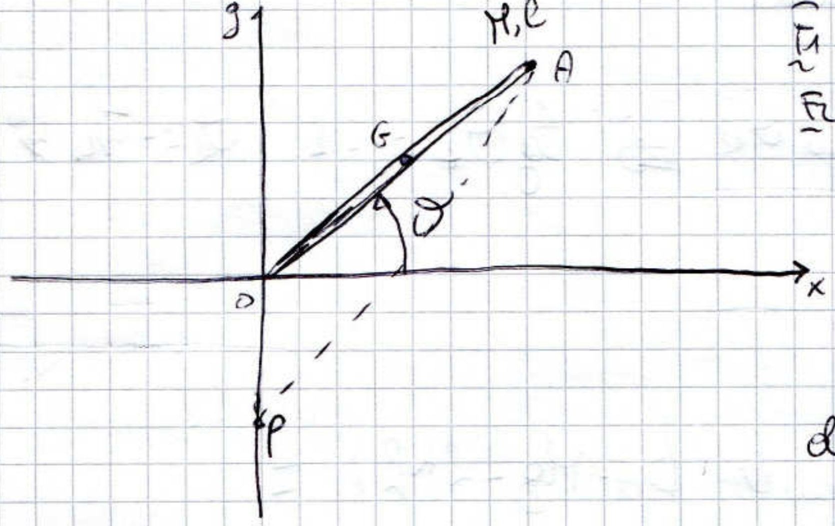
Prova scritta del 2 Luglio 2010

1) Nel piano verticale O*xy*, un'asta rigida OA di massa M e lunghezza ℓ è vincolata a ruotare senza attrito attorno all'asse z in O di versore $\boldsymbol{e}_3$; oltre alla reazione vincolare e alla forza peso, su di essa agiscono le forze attive $\boldsymbol{F}_1 = a\,\boldsymbol{e}_1 + b\,\boldsymbol{e}_2$, applicata nel baricentro G, e $\boldsymbol{F}_2 = k\,(\mathrm{P} - \mathrm{A})$, applicata in A, ove $\mathrm{P} \equiv (0, -h)$. Scrivere l'equazione pura del moto dell'asta, e calcolare le eventuali posizioni d'equilibrio, discutendone la stabilità, nel caso $2kh + Mg = a + b$.
Calcolare inoltre la reazione vincolare in O all'equilibrio.

2) Nel piano verticale O*xy*, un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla circonferenza (liscia o scabra) di equazione $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}\,R\,x + 2R^2 = 0$. Oltre alla forza peso e alla reazione vincolare, esso è soggetto alla forza attiva $\boldsymbol{F} = k\,(\mathrm{A} - \mathrm{P})$, ove $\mathrm{A} \equiv (0, -2R)$. Scrivere l'equazione del moto di P e calcolare la reazione vincolare; discutere inoltre l'equilibrio: nel caso liscio per $mg = kR$ con studio della stabilità, nel caso scabro per $k = \mu - 1/2 = 0$.

3) Nel piano O*xy*, si consideri la figura costituita da un rettangolo di base $2a$ ed altezza a, con la base poggiata simmetricamente sopra l'asse x, a cui è sottratto un semicerchio di raggio a col diametro coincidente con la suddetta base.
Si determinino il baricentro e la matrice centrale d'inerzia di tale figura, nonché gli assi e i momenti centrali.

Es. d'esame



$\underset{\sim}{F_1} = a\,\underset{\sim}{e_1} + b\,\underset{\sim}{e_2}$ in G

$\underset{\sim}{F_2} = k(P-A)$ in A

$P \equiv (0, -h)$

$2kh - Mg = a + b$

det. le pos. di equilibrio discutendone il tipo

$\theta = x\hat{O}A$

$x_A = l\cos\theta$, $y_A = l\,\mathrm{sen}\,\theta$

$x_G = \frac{l}{2}\cos\theta$, $y_G = \frac{l}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$

$F_{2x} = k(x_P - x_A) = -kl\cos\theta$

$F_{2y} = k(y_P - y_A) = k(-h - l\,\mathrm{sen}\,\theta) = -k(h + l\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$I_z\ddot{\theta} = M_z^{(e,a)}$;

$I_z = \frac{1}{3}Ml^2$, $M_z^{(e,a)} = (G-O)\times M\underset{\sim}{g}\cdot\underset{\sim}{e_3} + (G-O)\times\underset{\sim}{F_1}\cdot\underset{\sim}{e_3} + (A-O)\times\underset{\sim}{F_2}\cdot\underset{\sim}{e_3}$

$$M_z^{(e,a)} = \begin{vmatrix} \frac{l}{2}\cos\theta & \frac{l}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ 0 & -Mg & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{l}{2}\cos\theta & \frac{l}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} l\cos\theta & l\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ -kl\cos\theta & -k(h+l\,\mathrm{sen}\,\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{-Mg\frac{l}{2}\cos\theta} + \cancel{\frac{l}{2}} - Mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{l}{2}(b\cos\theta - a\,\mathrm{sen}\,\theta) - kl\cos\theta(h + \cancel{l\,\mathrm{sen}\,\theta}) + \cancel{kl^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\cos\theta$$

$\Rightarrow M_z^{(e,a)}(\theta) = \cos\theta\left(b\frac{l}{2} - Mg\frac{l}{2} - klh\right) - a\frac{l}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$

equilibrio

$M_z^{(e,a)}(\theta_e) = 0$

$\left(b\frac{\ell}{2} - Mg\frac{\ell}{2} - Kh\ell\right)\cos\theta_e = a\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta_e$

$\frac{Mg}{2} + Kh\ell = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)\ell$ quindi

$\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)\ell\cos\theta_e = \frac{a\ell}{2}\operatorname{sen}\theta_e \Rightarrow \operatorname{tg}\theta_e = -1 \quad \theta_e = -\pi/4 \;\; \vee \;\; \frac{3}{4}\pi$

$M_z^{(e,a)}(\theta) = U'(\theta)$

$U''(\theta) = -\frac{a\ell}{2}\cos\theta - \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta(b - Mg - 2Kh) =$

$= -\frac{a\ell}{2}\cos\theta - \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta(-a) = -\frac{a\ell}{2}(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$

$U''\left(\theta_e = -\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{a\ell}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{cases} <0 \text{ se } a>0 : -\pi/4 \text{ stabile} \\ >0 \text{ se } a<0 \quad -\frac{\pi}{4} \text{ instabile} \end{cases}$

$U''\left(\theta_e = \frac{3}{4}\pi\right) = -a\frac{\ell}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \begin{cases} <0 \text{ se } a < \frac{3}{4}\pi \text{ stabile} \\ >0 \text{ se } a > \frac{3}{4}\pi \text{ instabile} \end{cases}$

Reaz. vincolare all'equilibrio

$\underset{\sim}{\Phi}_o^{(e)} + M\underset{\sim}{g} + \underset{\sim}{F}_1 + \underset{\sim}{F}_2 = \underset{\sim}{0}$

$\overline{\Phi}_{o,x}^{(e)} = -F_{1,x} - F_{2,x} = -a + K\ell\cos\theta_e$

$\overline{\Phi}_{o,y}^{(e)} = +Mg - F_{1,y} - F_{2,y} = Mg - b + K(h + \ell\operatorname{sen}\theta_e)$

$\overline{\Phi}_{o,x}\left(\theta_e = -\frac{\pi}{4}\right) = -a + \frac{\sqrt{2}}{2}K\ell$

$\Phi_{o,y}\left(\theta_e = -\frac{\pi}{4}\right) = Mg - b + K\left(h - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)$

$\Phi_{o,x}\left(\theta_e = \frac{3}{4}\pi\right) = -a - \frac{\sqrt{2}}{2}K\ell$

$\Phi_{o,y}\left(\theta_e = \frac{3}{4}\pi\right) = Mg - b + K\left(h + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)$

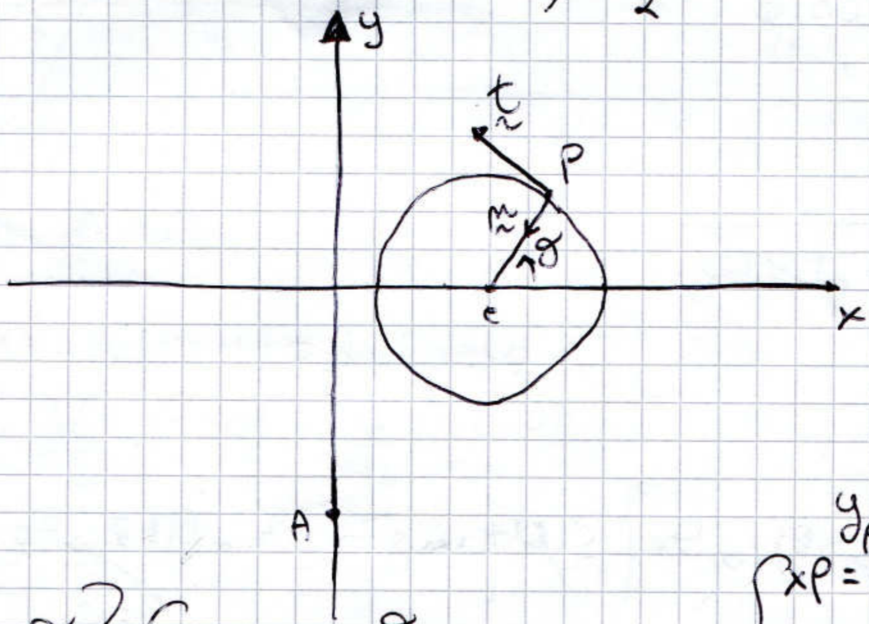
Es n° 2 del d'esame

$x^2+y^2-2\sqrt{3}Rx+2R^2=0$

$\underline{F}=K(A-P)$, $A=(0,-2R)$

eq. del moto di P, equilibrio nel caso liscio con $Mg=KR$ (con stabilità)

equilibrio nel caso scabro con $K=\mu\cdot\frac{1}{2}=0$



$x_C=\sqrt{3}R$

$y_C=0$

Raggio $=R$

$\vartheta = x\hat{C}P$

$x_P = x_C + R\cos\vartheta$

$y_P = y_C + R\,\mathrm{sen}\,\vartheta$

$$\begin{cases} x_P = R(\sqrt{3}+\cos\vartheta) \\ y_P = R\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} t_x = -\mathrm{sen}\,\vartheta \\ t_y = \cos\vartheta \end{matrix}\right\} \quad \begin{cases} n_x = -\cos\vartheta \\ n_y = -\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$$

$\underline{b}=\underline{e}_3$

$F_x = K(x_A-x_P) = -KR(\sqrt{3}+\cos\vartheta)$, $F_y = -2KR - KR\,\mathrm{sen}\,\vartheta$

$F_t = m\underline{g}\cdot\underline{t} + K(A-P)\cdot\underline{t} = -mg\cos\vartheta + KR(\sqrt{3}+\cancel{\cos}\vartheta)(+\mathrm{sen}\,\vartheta) +$

$-2KR\cos\vartheta - KR\,\cancel{\mathrm{sen}\,\vartheta}\cos\vartheta$

$F_t = \sqrt{3}KR\,\mathrm{sen}\,\vartheta - (mg+2KR)\cos\vartheta$

$$\begin{cases} mR\ddot{\vartheta} = F_t(\vartheta) \\ mR\dot{\vartheta}^2 = F_n + \Phi_n \\ 0 = \Phi_b \end{cases} \Rightarrow 4$$

$\Phi_n = mR\dot{\vartheta}^2 - F_n = mR\dot{\vartheta}^2 - [mg\,\mathrm{sen}\,\vartheta + KR(\sqrt{3}+\cos\vartheta)\cos\vartheta + 2KR\,\mathrm{sen}\,\vartheta + KR\,\mathrm{sen}^2\vartheta]$

$\Phi_n = mR\dot{\vartheta}^2 - mg\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \sqrt{3}KR\cos\vartheta + 2KR\,\mathrm{sen}\,\vartheta + KR$ (caso liscio)

equilibrio

$\exists\, F_t(\vartheta_e)=0$ nel caso che $Mg=KR \rightarrow \sqrt{3}KR\,\mathrm{sen}\,\vartheta_e = 3\cancel{KR}\cos\vartheta_e$

$\mathrm{tg}(\vartheta_e)=\sqrt{3}$ $\quad \vartheta_e = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$ $\rightarrow$

$\mathcal{F}_t = \frac{\ell}{R}\, U'(\theta)$

$U''(\theta) = R\left(\sqrt{3}KR\cos\theta + 3\sqrt{3}KR\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$

$U''\left(\theta_e = \frac{\pi}{3}\right) = KR^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) > 0$ instabile

$U''\left(\theta_e = \frac{4}{3}\pi\right) \cancel{2KR^2} < 0$ stabile

caso scabro

Equilibrio

$\left|\mathcal{F}_t(\theta_e)\right| \le \mu\sqrt{\mathcal{F}_n^2(\theta_e) + \cancel{\mathcal{F}_b^2(\theta_e)}} \Rightarrow$

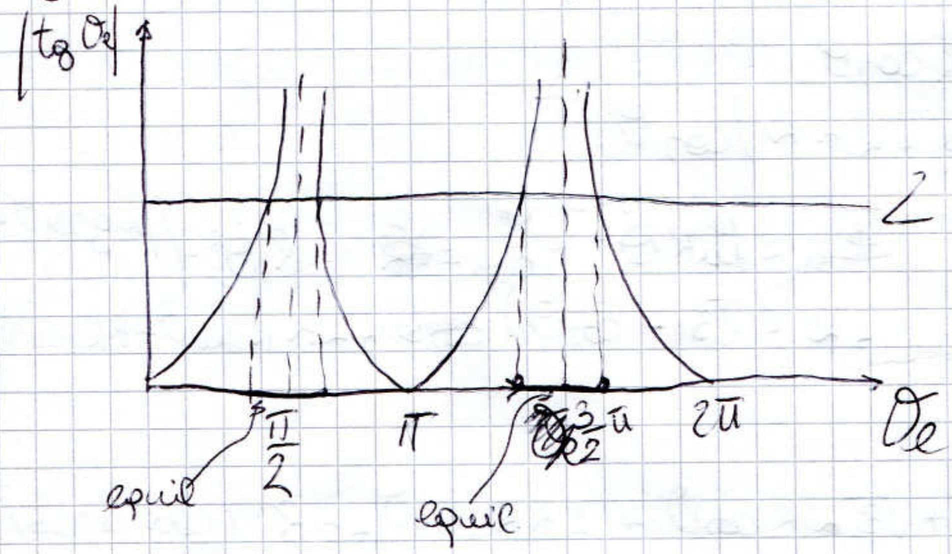
$\left|\mathcal{F}_t(\theta_e)\right| \le \mu\left|\mathcal{F}_n(\theta_e)\right|$

$\left|\cancel{\sqrt{3}KR\,\mathrm{sen}\,\theta_e} - (mg + \cancel{2KR})\cos\theta_e\right| \le \mu\left|mg\,\mathrm{sen}\,\theta_e + \cancel{\sqrt{3}KR\cos\theta_e} + \cancel{2KR\,\mathrm{sen}} + \cancel{KR}\right|$

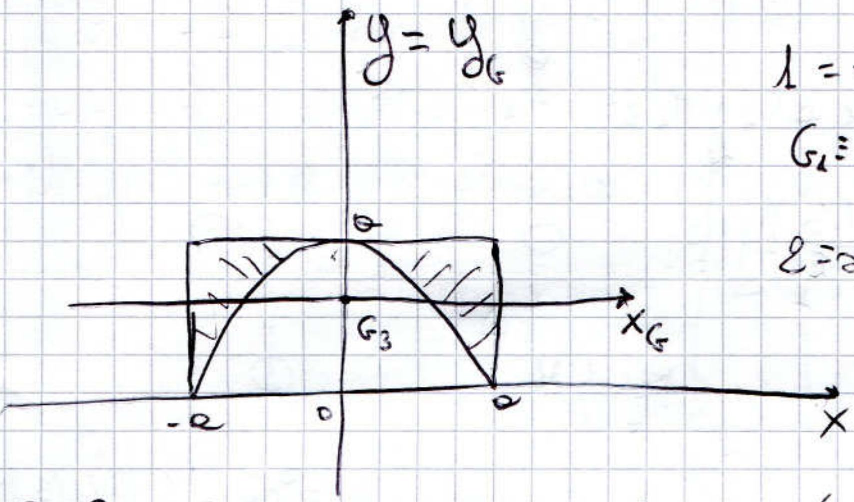
$mg\left|\cos\theta_e\right| \le \frac{1}{2}\, mg\left|\mathrm{sen}\,\theta_e\right|$

$2\left|\cos\theta_e\right| \le \left|\mathrm{sen}\,\theta_e\right|$

$\left|tg\,\theta_e\right| \ge 2 \quad \theta_e = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$



Es n° 3



1 = rettangolo $\Rightarrow A_1 = 2a^2$

$G_1 \equiv \left(0, \frac{a}{2}\right)$

2 = semicerchio $\Rightarrow A = \frac{\pi}{2} a^2$

$G_2 \equiv \left(0, \frac{4}{3\pi} a\right)$

3 = figura di interesse, $A_3 = A_1 - A_2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) a^2$

$A_1(G_1 - O) = A_2(G_2 - O) + A_3(G_3 - O) \Rightarrow$

$(G_3 - O) = \frac{A_1}{A_3}(G_1 - O) - \frac{A_2}{A_3}(G_2 - O)$

$x_{G_3} = \frac{2}{2 - \frac{\pi}{2}} \cdot 0 - \frac{\pi/2}{2 - \pi/2} \cdot 0 = 0$

$y_{G_3} = \frac{\cancel{2}}{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \frac{a}{\cancel{2}} - \frac{\pi/\cancel{2}}{2 - \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^{2} a}{3\cancel{\pi}} = \frac{a}{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{2}{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \frac{1}{3a} = \left(\frac{1 - 2/3}{2 - \frac{\pi}{2}}\right) a$

$I^{(3)}_{x_G} = I^{(1)}_{x_G} - I^{(2)}_{x_G} =$

$I^{(3)}_{y_G} = I^{(1)}_{y_G} - I^{(2)}_{y_G}$

$I_{x_G} = I_x - M y_G^2$ sia per 1, sia per 2

$I^{(1)}_{x_{G_3}} = I^{(1)}_x - M_1 y^2_{G_3} = \mu \int_{-a}^{a}\int_{0}^{a} y^2 \, dx \, dy - M_1 \left(\frac{1/3}{2 - \frac{\pi}{2}}\right)^2 a^2 =$

$= \mu \, 2a \, \frac{1}{3} a^3 - \left(\frac{1/3}{2 - \frac{\pi}{2}}\right)^2 a^2 = \frac{1}{3} M_1 a^2 - M_1 \left(\frac{1/3}{2 - \frac{\pi}{2}}\right)^2 a^2 = M_1 a^2 \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1/3}{2 - \frac{\pi}{2}}\right)^2\right)$

$I^{(2)}_{x_{G_3}} = I^{(2)}_x - M_2 y^2_{G_3} = \mu \int_{0}^{a}\int_{0}^{\pi} \rho^3 \sin^2\theta \, d\rho \, d\theta - M_2 y^2_{G_3}$

$\mu \frac{1}{4} a^4 \frac{\pi}{2} - M_2 y^2_{G_3} = \frac{1}{4} M_2 a^2 - M_2 \left(\frac{1/3}{2 - \frac{\pi}{2}}\right)^2 a^2 = M_2 a^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1/3}{2 - \frac{\pi}{2}}\right)^2$

$$I^{(3)}_{y_G} = \int I^{(1)}_{y_x} - I^{(2)}_{y} = \mu \int_{-a}^{a}\int_{0}^{a} x^2\,dx\,dy - \mu \int_{0}^{a}\int_{0}^{\pi} \rho^3 \cos^2\theta \, d\rho\, d\theta =$$

$$= \mu\, a\, \frac{2}{3} a^3 - \frac{1}{4} M_2 a^2 = \frac{1}{3} M_1 a^2 - \frac{1}{4} M_2 a^2$$

$$I^{(G)}_{h,x} = a^2 \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1/3}{2-\frac{\pi}{2}}\right)^2 M_1 - \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1/3}{2-\pi/2}\right)^2\right] M_2 \right.$$

0 0

0 $\frac{1}{3} M_1 - \frac{1}{4} M_2$ 0

0 0 $\left(\frac{2}{3} - \left(\frac{1/3}{2-\frac{\pi}{2}}\right)\right) M_1 - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1/3}{2-\frac{\pi}{2}}\right)\right.$